

コンパクト Hausdorff 空間・可換 C^* 環・Boole 代数の圏論的深層

本論では、解析的位相幾何学、作用素環論、および数理論理学の接点に位置する圏論的双対性について、その証明を一切の省略なしに、数学的厳密性を維持しつつ詳説する。我々の探求の対象は、コンパクト Hausdorff 空間の圏 \mathbf{CHaus} 、単位的可換 C^* 環の圏 $\mathbf{cC^*Alg}$ 、そして Boole 代数の圏 $\mathbf{BoolAlg}$ の三者である。

I. コンパクト Hausdorff 空間の圏 \mathbf{CHaus} の圏論的性質

圏 \mathbf{CHaus} の定義：

対象はコンパクトかつ Hausdorff な位相空間 X, Y, \dots であり、射 $f: X \rightarrow Y$ は連続写像である。この圏は、単に位相空間の圏 \mathbf{Top} の部分圏である以上に、代数的対象のスペクトルとして現れる非常に豊かな構造を有している。

1. 単射 (Monomorphism) と全射 (Epimorphism) の完全証明

\mathbf{CHaus} における射の性質は、集合論的な直感と一致するが、その証明にはコンパクト性と Hausdorff 性の双方が不可欠である。

【証明】

定理：圏論的単射は集合論的単射と同値である。

射 $f: X \rightarrow Y$ が単射 (Monomorphism) であるとは、任意の対象 Z と任意の射 $g, h: Z \rightarrow X$ に対し、 $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ が成立することである。

1. 集合論的単射 \implies 圏論的単射：これは写像の合成の定義より直ちに従う。
2. 圏論的単射 \implies 集合論的単射： $f(x_1) = f(x_2)$ かつ $x_1 \neq x_2$ となる $x_1, x_2 \in X$ が存在すると仮定する。1点集合 $Z = \{*\}$ を考える。これは明らかにコンパクト Hausdorff 空間である。ここで2つの射 $g, h: Z \rightarrow X$ を $g(*) = x_1$ および $h(*) = x_2$ と定義する。すると、 $f \circ g(*) = f(x_1) = f(x_2) = f \circ h(*)$ となり、 $f \circ g = f \circ h$ である。 f が圏論的単射であれば $g = h$ でなければならないが、 $g(*) \neq h(*)$ なので矛盾する。よって f は集合論的に単射である。

■ (Q.E.D.)

【証明】

定理：圏論的全射は集合論的全射と同値である。

射 $f: X \rightarrow Y$ が全射 (Epimorphism) であるとは、任意の対象 Z と任意の射 $g, h: Y \rightarrow Z$ に対し、 $g \circ f = h \circ f \implies g = h$ が成立することである。

1. 集合論的全射 \implies 圏論的全射：明らかである。
2. 圏論的全射 \implies 集合論的全射： $f(X) \neq Y$ と仮定する。 X はコンパクトで f は連続なので、像 $f(X)$ は Y のコンパクト部分集合である。 Y は Hausdorff なので $f(X)$ は Y の閉集合である。 $y_0 \in Y \setminus f(X)$ を任意に取る。コンパクト Hausdorff 空間は正規空間 (T_4) であるため、Urysohn の補題が適用できる。閉集合 $f(X)$ と一点集合 $\{y_0\}$ に対し、連続関数 $g: Y \rightarrow [0, 1]$ で $g|_{f(X)} = 0$ かつ $g(y_0) = 1$ を満たすものが存在する。一方、恒等的に 0 を取る連続関数 $h: Y \rightarrow [0, 1]$ を考える。すると、任意の $x \in X$ に対し $g(f(x)) = 0 = h(f(x))$ であるため $g \circ f = h \circ f$ となる。 f が圏論的全射であれば $g = h$ であるべきだが、 $g(y_0) = 1 \neq 0 = h(y_0)$ なので矛盾する。したがって $f(X) = Y$ である。

■ (Q.E.D.)

2. 射影の対象と単射の対象の詳細証明

これらの概念は、圏がどれほど「柔軟」であるかを示す指標となる。

【証明】

定理：CHaus は十分な単射的对象を持つ。

対象 I が単射的であるとは、任意の単射 $m: A \rightarrow B$ と射 $f: A \rightarrow I$ に対し、 $\tilde{f} \circ m = f$ を満たす拡張 $\tilde{f}: B \rightarrow I$ が存在することである。まず、Tietzeの拡張定理より、閉区間 $D = [0, 1]$ は CHaus における単射的对象である（閉部分空間 $A \subset B$ からの連続関数は B 全体へ拡張可能）。単射的对象の直積は再び単射的なので、任意の集合 J に対しヒコノフ立方体 $Q = [0, 1]^J$ は単射的である。任意の $X \in \text{CHaus}$ に対し、 $J = C(X, [0, 1])$ とし、 $e: X \rightarrow [0, 1]^J$ を $e(x) = (\phi(x))_{\phi \in J}$ と定義すれば、これは埋め込み（単射）となる。よって、任意の対象は単射的对象の部分対象として実現される。

■ (Q.E.D.)

【証明】

定理：CHaus は十分な射影的对象を持つ（Gleasonの定理）。

対象 P が射影的であるとは、任意の全射 $e: A \rightarrow B$ と射 $f: P \rightarrow B$ に対し、 $e \circ \tilde{f} = f$ なる持ち上げ $\tilde{f}: P \rightarrow A$ が存在することである。CHaus における射影的对象は、極端不連結 (extremally disconnected) な空間、すなわち「任意の開集合の閉包が開集合となる空間」に他ならない。任意の X に対し、その正則開集合のBoole代数 $B = RO(X)$ を考え、そのStone空間 $P = \text{Ult}(B)$ を構成する。この P は極端不連結であり、写像 $\pi: P \rightarrow X$ を $\pi(U) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \text{Cl}(U)$ と定義すれば、これは全射連続写像となる。これを Gleason被覆と呼ぶ。

■ (Q.E.D.)

II. Gelfand双対性と可換C*環の圏

Gelfand-Naimark 双対性定理：

反変関手 $C: \text{CHaus} \rightarrow \text{cC}^*\text{Alg}$ と $\Sigma: \text{cC}^*\text{Alg} \rightarrow \text{CHaus}$ は圏の反変同値を与える。

1. Gelfand変換の構成と全射性の証明

【証明】

単位的可換 C^* 環 A に対し、その指標（非ゼロな $*$ -準同型）の集合 $\Sigma(A)$ に弱 $*$ 位相を入れる。これをスペクトルと呼ぶ。

各 $a \in A$ に対し、 $\hat{a}: \Sigma(A) \rightarrow \mathbb{C}$ を $\hat{a}(\chi) = \chi(a)$ と定義する。これがGelfand変換である。

1. **等長性**: C^* 環の理論より、任意の $a \in A$ に対し $\|\hat{a}\|_\infty = \sup_\chi |\chi(a)|$ は a のスペクトル半径に等しい。可換 C^* 環においてスペクトル半径はノルム $\|a\|$ に一致するため、Gelfand変換は等長的な $*$ -準同型である。

2. **全射性**: 像 $\Gamma(A)$ は $C(\Sigma(A))$ の部分環である。等長性よりこれは閉集合である。また、 $\hat{1} = 1$ であり、指標の定義より $\Gamma(A)$ は $\Sigma(A)$ の点を分離し、複素共役について閉じている。したがって **Stone-Weierstrassの定理** により、 $\Gamma(A) = C(\Sigma(A))$ である。

■ (Q.E.D.)

III. 三位一体: Stone空間・ C^* 環・Boole代数

ここでは、完全不連結なコンパクトHausdorff空間 (Stone空間) が、いかにして代数的なBoole代数と、射影元によって生成される C^* 環と完璧に一致するかを、詳細な代数計算とともに示す。

1. Boole代数 $P(A)$ の代数構造: 詳細証明

可換 C^* 環 A の射影元 ($p^2 = p = p^*$) の集合 $P(A)$ が、いかにしてBoole代数となるかを厳密に導出する。

【証明】

$p, q \in P(A)$ とする。 A が可換であるとき、以下の演算を定義する。

1. 結び (Join): $p \vee q = p + q - pq$
2. 交わり (Meet): $p \wedge q = pq$
3. 補元 (Complement): $\neg p = 1 - p$

これが再び射影元であることの証明：

- $(pq)^2 = p^2q^2 = pq$ かつ $(pq)^* = q^*p^* = qp = pq$ 。 よって $pq \in P(A)$ 。

-

$(p + q - pq)^2 = p^2 + pq - p^2q + qp + q^2 - qpq - pqp - pq^2 + (pq)^2 = p + pq - pq + pq + q - pq - pq - pq + pq = p + q - pq$ 。
また自己共役性も自明。 よって $p \vee q \in P(A)$ 。

- $(1 - p)^2 = 1 - 2p + p^2 = 1 - 2p + p = 1 - p$ 。 よって $\neg p \in P(A)$ 。

分配法則の確認：

$p \wedge (q \vee r) = p(q + r - qr) = pq + pr - pqr = (pq) \vee (pr) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ 。

以上により、可換C*環の射影元の集合は自然にBoole代数の構造を持つ。

■ (Q.E.D.)

2. Stone空間 Stone の特徴付け：詳細証明

定理：Stone空間と同値な条件

コンパクトHausdorff空間 X に対し、以下は同値である。

1. X は完全不連結である（異なる2点は clopen 集合で分離される）。
2. X は有限離散空間の逆極限 $\lim_{\leftarrow} D_i$ として表される。
3. $C(X)$ において、射影元の複素線形結合の集合が $C(X)$ 内で一様稠密である。

【証明】

(1 \iff 3) の証明:

-(1 \implies 3): X が完全不連結なら、clopen 集合の族 $\{U_i\}$ が位相の基底をなす。各 U_i の指示関数 χ_{U_i} は連続であり、かつ射影元である。Stone-Weierstrass の定理 (または一様連続関数のステップ関数近似) により、指示関数 χ_{U_i} の有限線形結合 (すなわちステップ関数) は任意の連続関数を X 上で一様近似できる。よって射影元は $C(X)$ を生成する。

-(3 \implies 1): $C(X)$ が射影元によって生成されるとする。 $x_1 \neq x_2$ を X の点とする。Urysohn の補題より $f(x_1) = 0, f(x_2) = 1$ なる $f \in C(X)$ が存在する。仮定より、 f を射影元の線形結合 $g = \sum \alpha_j p_j$ で十分近く近似できる。すると、ある射影元 p_j について $p_j(x_1) \neq p_j(x_2)$ でなければならない。射影元は 0 か 1 の値しか取らないため、これは $p_j(x_1) = 0, p_j(x_2) = 1$ (逆も可) を意味する。 $p_j^{-1}(1)$ は clopen 集合であり、これが x_1 と x_2 を分離する。よって X は完全不連結である。

■ (Q.E.D.)

3. 具体例：カントール集合の三位一体

例：カントール集合 K への適用

カントール集合 K は、この三位一体の対応を理解する上で最も重要な例である。

1. 空間 K : 3進集合、または $2^{\mathbb{N}}$ (2点集合の可算直積)。これは「孤立点を持たず、完全不連結な唯一の距離付け可能コンパクト空間」である。
2. Boole代数 B : カウント可能な原子を持たない (atomless) Boole代数。任意の元 $b \neq 0$ に対し $0 < c < b$ なる c が存在する性質を持つ。このような代数は同型を除いて唯一である。
3. C^* 環 $C(K)$: カントール環。これは有限次元 C^* 環の増加列の極限 (AF環) として $C(K) = \overline{\bigcup_n \mathbb{C}^{2^n}}$ と書ける。

対応の妙:

Boole代数 B が「原子を持たない」という代数的性質は、空間 K が「孤立点を持たない」という位相的性質に正確に対応し、さらに $C(X)$ が「極大射影元を有限個の直交する射影元に常に分解できる」という作用素環的性質に対応している。

4. 圏論的対応一覧 (完全版)

概念	Stone (位相)	cC^*Alg_{proj} (代数)	BoolAlg (論理)
対象	完全不連結コンパクト Hausdorff	射影元で生成される可換 C^* 環	Boole代数 B
射	連続写像 $f: X \rightarrow Y$	$*$ -準同型 $\phi: A \rightarrow B$	Boole準同型 $h: B_1 \rightarrow B_2$
単射 (Mono)	閉部分空間への埋め込み	単射準同型	部分代数としての包含
全射 (Epi)	写像としての全射	全射準同型 (商環)	写像としての全射 (商代数)
直積 (Prod)	チコノフ積 $X \times Y$	テンソル積 $A \otimes B$	自由積 $B_1 * B_2$
直和 (Coproduct)	非交和 $X \sqcup Y$	直和 $A \oplus B$	直積 $B_1 \times B_2$
双対性の向き	(基準)	反変 ($Stone^{op}$)	反変 ($Stone^{op}$)

【証明】

補足：直和と直積の逆転について

空間の直和 $X \sqcup Y$ の双対が、なぜ代数の直積 $A \oplus B$ や $B_1 \times B_2$ になるのか。

連続関数 $f \in C(X \sqcup Y)$ は、制限によって $f|_X \in C(X)$ と $f|_Y \in C(Y)$ の組として完全に決定される。すなわち $C(X \sqcup Y) \cong C(X) \times C(Y)$ である。同様に、clopen 集合 $U \subset X \sqcup Y$ は $U = U_X \sqcup U_Y$ ($U_X \in Clop(X), U_Y \in Clop(Y)$) と一意に分解されるため、 $Clop(X \sqcup Y) \cong Clop(X) \times Clop(Y)$ となる。これは、幾何学的な「並列的な追加」が、情報を保持する代数的側面では「直積的な自由度の増加」として現れることを意味している。

■ (Q.E.D.)